CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Esercizi della prova scritta del 7 gennaio 2004

Studio di funzione:
Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}e^{x^2} & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (h) punti di non derivabilità.

Studio di grafico di funzione:
Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 2; (l) punti di non derivabilità; (m) punti di flesso.

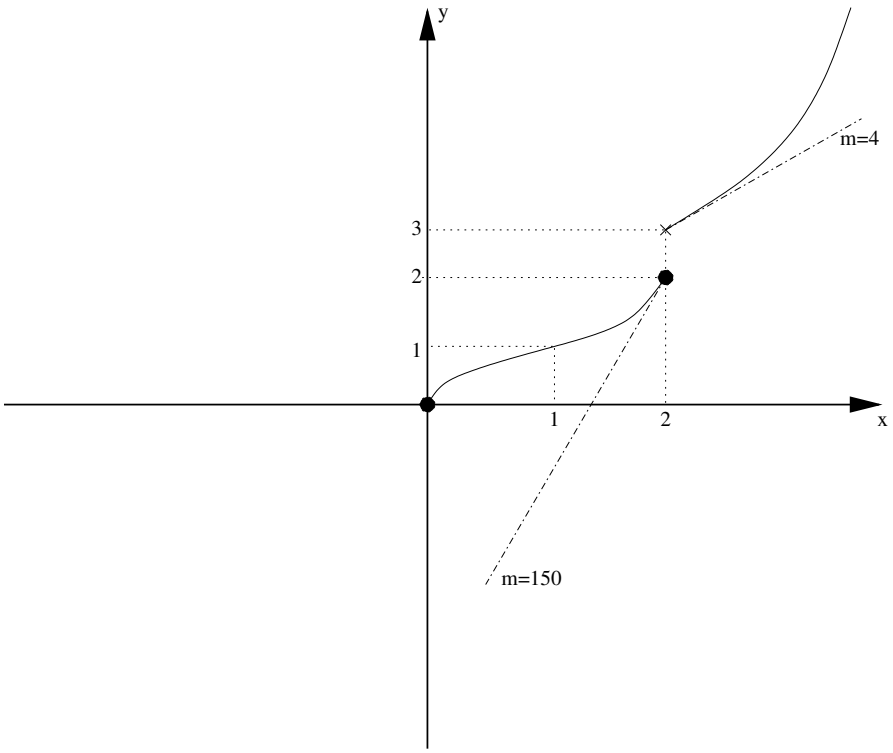

Figura 1: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

Massimi e minimi:
Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(-1, 1]$ della seguente funzione:

$$f(x) := \sqrt{x^2}$$

Zeri:
Stabilire se $f(x) := x^3 + 2x^2 - x - 1$ ammette degli zeri su $(-1, 1)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

Punti fissi:
Stabilire se la curva $f(x) := x^3 + 2x^2 - 1$ e la retta $y = x$ si intersecano nell'intervallo $(-1, 1)$. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := x^3 + 2x^2 - 1$ nell'intervallo $(-1, 1)$.

Teorico:
Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{x^6 + 1}$ assume il valore 1 nell'intervallo $[0, \sqrt[6]{e^2 - 1}]$ (giustificare la risposta).